

2021年3月杭二中高三开学考

1: 若集合 $M = \{x | x > 1\}$, $N = \{x \in \mathbf{Z} | 0 \leq x \leq 4\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} M) \cap N =$ ()

- A. $\{0\}$ B. $(0, 1)$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

2: 已知 α, β 为不同的平面, a, b, c 为不同的直线, 则下列说法正确的是 ()

- A. 若 $a \subset \alpha, b \subset \beta$, 则 a 与 b 是异面直线
 B. 若 a 与 b 是异面直线, b 与 c 是异面直线, 则 a 与 c 也是异面直线
 C. 若 a, b 不同在平面 α 内, 则 a 与 b 是异面直线
 D. 若 a, b 不同在任何一个平面 α 内, 则 a 与 b 是异面直线

3: “ $m \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ ” 是 “函数 $f(x) = \begin{cases} (3m-1)x+4m, & x < 1, \\ -mx, & x \geq 1 \end{cases}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数” 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4: 已知 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \cos \alpha = 1$, 则 $\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) =$ ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

5: 已知某几何体的一条棱的长为 m , 该棱在正视图中的投影长为 $\sqrt{6}$, 在侧视图与俯视图中的投影长为 a 与 b , 且 $a+b=4$, 则 m 的最小值为 ()

- A. $\sqrt{5}$ B. $\frac{\sqrt{14}}{2}$ C. $\sqrt{7}$ D. 2

6: 美国对华为实行了禁令, 为了突围实现技术自主, 华为某分公司抽调了含甲、乙的 5 个工程师到华为总部的 4 个不同的技术部门参与研发, 要求每个工程师只能去一个部门, 每个部门至少去一个工程师, 且甲、乙两人不能去同一个部门, 则不同的安排方式一共有 () 中

- A. 96 B. 120 C. 180 D. 216

7: 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \leq 8 \\ 2y-x \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 且 $z=5y-x$ 的最大值为 a , 最小值为 b , 则 $a-b$ 的值是

- ()
 A. 48 B. 30 C. 24 D. 16

8: 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $0 < a_1 < \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n + \ln(2-a_n)$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 则下列说法不正确的是

()

- A. $\frac{1}{2} < a_2 < 1$ B. $\{a_n\}$ 是递增数列 C. $1 < a_{2020} < \frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{4} < a_{2020} < 1$

9: 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 与双曲线在第一象限和第三象限的交点分别为 A, B , 四边形 AF_2BF_1 的周长 p 与面积 S 满足 $p = 4\sqrt{2S}$, 则该双曲线的离心率为

()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10: 已知函数 $f(x) = (ax + \ln x)(x - \ln x) - x^2$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 (其中 $x_1 < x_2 < x_3$), 则

$\left(1 - \frac{\ln x_1}{x_1}\right)^2 \left(1 - \frac{\ln x_2}{x_2}\right) \left(1 - \frac{\ln x_3}{x_3}\right)$ 的值为

()

- A. $1 - a$ B. $a - 1$ C. -1 D. 1

11: 已知 i 是虚数单位, $x \in \mathbb{R}$, 复数 $z = (x + i)(2 + i)$ 为纯虚数, 则 $x =$ _____, 复数 $2x - i$ 的模等于 _____.

12: 已知 $(x^2 - 3x + 2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$, 则 $a_1 =$ _____, $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 10a_{10} =$ _____.

13: 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的表面上, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA = 6$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 2$, $BC = 4$, 则球 O 的半径为 _____; 若 D 是 BC 的中点, 过点 D 作球 O 的截面, 则截面面积的最小值是 _____.

14: 某学生在上学路上要经过 4 个路口, 假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的, 遇到红灯的概率都是 $\frac{1}{3}$, 遇到红灯时停留的时间都是 2 分钟, 则这名学生在上学路上因遇到红灯停留的总时间 ξ 的期望为 _____, 方差为 _____.

15: 已知 $\triangle ABC$ 的三个角 A, B, C 所对的边为 a, b, c . 若 $\angle BAC = 60^\circ$, D 为边 BC 上一点, 且 $AD = 1$, $BD:DC = 2c:3b$, 则 $2b + 3c$ 的最小值为 _____.

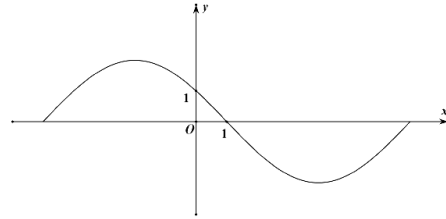
16: 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足: $S_n + 2a_n = 6 - 6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n (n \in \mathbb{N}^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 中最大项等于 _____.

17: 已知 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 过点 G 的直线与边 AB, AC 分别相交于点 P, Q . 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, 则当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle APQ$ 的面积之比为 $\frac{20}{9}$ 时, 实数 λ 的值为 _____.

18: (本小题满分 14 分) 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$) 的图象如图所示, 其中 $f(0) = 1, f(1) = 0$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期 T ;

(2) 若 $-2 < x_0 < 1$, 且 $f(x_0) = \frac{1}{2}$, 求 $\cos(\frac{\pi}{6}x_0)$.

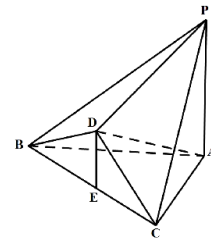


19: 如图, 在多面体 $ABCDP$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形, $PA = AC, BD = CD = 2\sqrt{2}$, $PB = PC = 4\sqrt{2}$, 点 E 为 BC 的中点, 平面 $BDC \perp$ 平面 ABC .

(1) 求证: $DE \parallel$ 平面 PAC ;

(2) 线段 BC 上是否存在一点 T , 使得二面角 $T-DA-B$ 为直二面角?

若存着, 试指出点 T 的位置; 若不存在, 请说明理由.



20: 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_{n+1} = \frac{(2^{n+2} - 3)a_n + 2^{n+1} - 1}{a_n + 2^{n+1} - 1}$.

(1) 令 $b_n = \frac{a_n + 1}{2^n - 1}$, 证明: $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 为等差数列; (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(3) 令 $c_n = \frac{na_n + 2}{3^{n-1}}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

21: (本小题满分 15 分) 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点到直线 $x - 3y = 0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$,

离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 抛物线 $G: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点与椭圆 E 的焦点重合, 斜率为 k 的直线 l 过 G 的焦点

与 E 交于 A, B , 与 G 交于 C, D .

(I) 求椭圆 E 及抛物线 G 的方程;

(II) 是否存在常数 λ , 使得 $\frac{1}{|AB|} + \frac{\sqrt{5}\lambda}{|CD|}$ 为常数? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.

22: 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 + (a-1)x (a \in \mathbf{R}, a \neq 0)$.

(I) 当 $a < -1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(II) 记函数 $F(x)$ 的图象为曲线 C , 设点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 是曲线 C 上两个不同点, 如果曲线 C 上存在 $M(x_0, y_0)$, 使得: ① $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$; ② 曲线 C 在点 M 处的切线平行于直线 AB , 则称函数 $F(x)$ 存在“中值相依切线”. 试问: 函数 $f(x)$ 是否存在中值相依切线, 请说明理由.

(III) 当 $a = 1$, $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, 关于 x 的不等式 $2f(x) + x^2 + mx^3 e^{mx} \leq 0$ 恒成立, 求实数 m 的最大值.

2021年3月杭二中高三开学考

1: 若集合 $M = \{x | x > 1\}$, $N = \{x \in \mathbf{Z} | 0 \leq x \leq 4\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} M) \cap N =$ ()

- A. $\{0\}$ B. $(0, 1)$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

由题得 $N = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 所以 $(\complement_{\mathbf{R}} M) \cap N = \{0, 1\}$, 故选 C

2: 已知 α, β 为不同的平面, a, b, c 为不同的直线, 则下列说法正确的是 ()

- A. 若 $a \subset \alpha, b \subset \beta$, 则 a 与 b 是异面直线
B. 若 a 与 b 是异面直线, b 与 c 是异面直线, 则 a 与 c 也是异面直线
C. 若 a, b 不同在平面 α 内, 则 a 与 b 是异面直线
D. 若 a, b 不同在任何一个平面 α 内, 则 a 与 b 是异面直线

根据异面直线的定义可知 D 是正确的, 故选 D

3: “ $m \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ ” 是 “函数 $f(x) = \begin{cases} (3m-1)x+4m, & x < 1, \\ -mx, & x \geq 1 \end{cases}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数” 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

因为 “函数 $f(x) = \begin{cases} (3m-1)x+4m, & x < 1, \\ -mx, & x \geq 1 \end{cases}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数” 等价于 “ $\frac{1}{8} < m < \frac{1}{3}$ ”, 所以选项 B 正确,

故选 B

4: 已知 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\alpha = 1$, 则 $\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) =$ ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

由条件得 $\frac{3}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = 1$ ，所以 $\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，故选 B

5: 已知某几何体的一条棱的长为 m ，该棱在正视图中的投影长为 $\sqrt{6}$ ，在侧视图与俯视图中的投影长为 a 与 b ，且 $a+b=4$ ，则 m 的最小值为 ()

- A. $\sqrt{5}$ B. $\frac{\sqrt{14}}{2}$ C. $\sqrt{7}$ D. 2

构造长方体可知 $m^2 = \frac{6+a^2+b^2}{2} \geq 3 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 7$ ，得 $m \geq \sqrt{7}$ ，故选 C

6: 美国对华为实行了禁令，为了突围实现技术自主，华为某分公司抽调了含甲、乙的 5 个工程师到华为总部的 4 个不同的技术部门参与研发，要求每个工程师只能去一个部门，每个部门至少去一个工程师，且甲、乙两人不能去同一个部门，则不同的安排方式一共有 () 中

- A. 96 B. 120 C. 180 D. 216

由题：先选两个人一组： $C_3^2 + C_3^2 C_2^1 = 9$ 种，再分配到 4 个部门： A_4^4 。所以共有 $9A_4^4 = 216$ 种，故选 D.

7: 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \leq 8 \\ 2y-x \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ，且 $z=5y-x$ 的最大值为 a ，最小值为 b ，则 $a-b$ 的值是

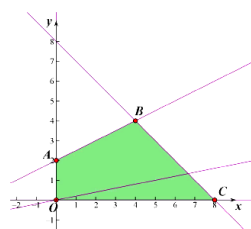
- ()
A. 48 B. 30 C. 24 D. 16

如图，作出可行域.

当经过点 $B(4,4)$ 时， z 取最大值 16，即 $a=16$ ；

当经过点 $C(8,0)$ 时， z 取最小值 -8，即 $b=-8$ 。

所以 $a-b=24$ ，故选 C.



8: 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $0 < a_1 < \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n + \ln(2 - a_n)$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ 恒成立, 则下列说法不正确的是

()

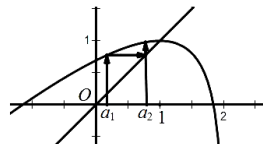
- A. $\frac{1}{2} < a_2 < 1$ B. $\{a_n\}$ 是递增数列 C. $1 < a_{2020} < \frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{4} < a_{2020} < 1$

$$\text{设 } y = x + \ln(2 - x), \text{ 则 } y' = 1 - \frac{1}{2 - x} = \frac{1 - x}{2 - x}$$

当 $x < 1$ 时, $y' > 0$, $y = x + \ln(2 - x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递增,

当 $1 < x < 2$ 时, $y' < 0$, $y = x + \ln(2 - x)$ 在 $(1, 2)$ 单调递减,

由蛛网图知, ABD 正确, C 错误. 故选 C.



9: 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 与双曲线在第一象限和第三象限的交点分别为 A, B , 四边形 AF_2BF_1 的周长 p 与面积 S 满足 $p = 4\sqrt{2S}$, 则该双曲线的离心率为

()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(利用定义) 不妨设 $|AF_1| = m$, $|BF_2| = n$, 则 $m - n = 2a$, $m^2 + n^2 = 4c^2$, 故 $2mn = 4b^2$, 所以

$(m + n)^2 = 4c^2 + 4b^2$, 即 $p = 2(m + n) = 4\sqrt{c^2 + b^2}$, 而面积 $S = mn = 2b^2$, 故可得 $4\sqrt{c^2 + b^2} = 4\sqrt{4b^2}$, 即

$c = \sqrt{3}b$, 可得 $e = \sqrt{2}$, 所以选 B.

10: 已知函数 $f(x) = (ax + \ln x)(x - \ln x) - x^2$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 (其中 $x_1 < x_2 < x_3$), 则

$\left(1 - \frac{\ln x_1}{x_1}\right)^2 \left(1 - \frac{\ln x_2}{x_2}\right) \left(1 - \frac{\ln x_3}{x_3}\right)$ 的值为

()

- A. $1 - a$ B. $a - 1$ C. -1 D. 1

显然方程 $f(x) = 0$ 与方程 $\frac{f(x)}{x^2} = \left(\frac{ax + \ln x}{x}\right) \left(\frac{x - \ln x}{x}\right) - 1 = \left(a + \frac{\ln x}{x}\right) \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) - 1 = 0$ (*) 是同解的,

由结论设 $g(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} = t$, 考虑其导数 $g'(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x_0 = e$, 研究其单调性和值域如下表:

x	$(0, e)$	$x = e$	$(e, +\infty)$
$g'(x)$	< 0	$= 0$	> 0
$g(x)$ 单调性	单调递减	极小值点	单调递增
$g(x)$ 值域	$\left(1 - \frac{1}{e}, +\infty\right)$	$1 - \frac{1}{e}$	$\left(1 - \frac{1}{e}, 1\right)$

则方程 (*) 等价于 $t^2 - (a+1)t + 1 = 0$ (#) 有两个不等实根 t_1, t_2 . 对应 x_i 有两种情况:

(1) 其中一根 $t_1 \in [1, +\infty)$ 对应一个实根, 另一根 $t_2 \in \left(1 - \frac{1}{e}, 1\right)$ 对应两个不等实根, 而 $t_1 \in [1, +\infty)$ 对应较小的

根 $x_1 \in (0, 1]$, 即 $t_1 = 1 - \frac{\ln x_1}{x_1}$; $t_2 \in \left(1 - \frac{1}{e}, 1\right)$ 对应两个较大实根 x_2, x_3 , 即 $t_2 = 1 - \frac{\ln x_2}{x_2} = 1 - \frac{\ln x_3}{x_3}$;

因此由韦达定理得: $t_1 t_2 = 1 = \left(1 - \frac{\ln x_1}{x_1}\right) \left(1 - \frac{\ln x_2}{x_2}\right) = \left(1 - \frac{\ln x_1}{x_1}\right) \left(1 - \frac{\ln x_3}{x_3}\right)$,

所求: $\left(1 - \frac{\ln x_1}{x_1}\right)^2 \left(1 - \frac{\ln x_2}{x_2}\right) \left(1 - \frac{\ln x_3}{x_3}\right) = 1^2 = 1$.

(2) 一根 $t_1 = 1 - \frac{1}{e}$ 对应一个实根, 另一根 $t_2 \in \left(1 - \frac{1}{e}, 1\right)$ 对应两个不等实根, 此时 $t_1 t_2 < 1 - \frac{1}{e} < 1$, 不成立.

综上所述, 仅 (1) 成立, 对应 $\left(1 - \frac{\ln x_1}{x_1}\right)^2 \left(1 - \frac{\ln x_2}{x_2}\right) \left(1 - \frac{\ln x_3}{x_3}\right) = 1$, 故选 D

11: 已知 i 是虚数单位, $x \in R$, 复数 $z = (x+i)(2+i)$ 为纯虚数, 则 $x =$ _____, 复数 $2x-i$ 的模等于 _____.

解析: $z = (2x-1) + (x+2)i$, 因为复数 z 为纯虚数, 所以满足 $\begin{cases} 2x-1=0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$,

$2x-i = 1-i$, 所以 $|1-i| = \sqrt{2}$. 故填 $\frac{1}{2}; \sqrt{2}$.

12: 已知 $(x^2 - 3x + 2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$, 则 $a_1 =$ _____, $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 10a_{10} =$ _____.

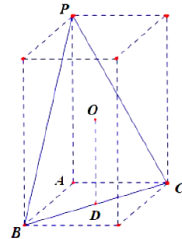
$(x^2 - 3x + 2)^5 = [(x^2 + 2) - 3x]^5$, 展开式中含 x 的项只可能出现在 $C_5^1 (x^2 + 2)^4 (-3x)$ 中,

所以含 x 项的系数为 $a_1 = C_5^1 \cdot 2^4 \cdot (-3) = -240$.

对原等式两边求导, 得 $5(x^2 - 3x + 2)^4 (2x - 3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + 10a_{10}x^9$,

取 $x=1$, 得 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 10a_{10} = 0$. 故填 $-240; 0$.

13: 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的表面上, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA=6$, $AB=2\sqrt{3}$, $AC=2$, $BC=4$, 则球 O 的半径为_____; 若 D 是 BC 的中点, 过点 D 作球 O 的截面, 则截面面积的最小值是_____.



$$AB^2 + AC^2 = BC^2, \text{ 所以 } AB \perp AC,$$

$PA \perp$ 平面 ABC , 所以 PA, AB, AC 两两垂直, 于是可以将三棱锥补形为长方体, 其外接球的直径为长方体的体对角线, 即 $2R = 2\sqrt{13}$, 所以 $R = \sqrt{13}$.

设截面圆的半径为 r , 点 D 到截面的距离为 d ,

$$\text{所以 } r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{13 - d^2}, \text{ 其中 } d \leq |OD| = 3,$$

所以当 $d=3$ 时, $r_{\max} = 2$, 此时截面圆的面积最小值为 4π . 故填 $\sqrt{13}$; 4π .

14: 某学生在上学路上要经过 4 个路口, 假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的, 遇到红灯的概率都是 $\frac{1}{3}$, 遇到红灯时停留的时间都是 2 分钟, 则这名学生在上学路上因遇到红灯停留的总时间 ξ 的期望为_____, 方差为_____.

设变量 η 为这名学生在上学路上因遇到红灯的次数, 则 $\xi = 2\eta$, 由题意 $\eta \sim B\left(4, \frac{1}{3}\right)$, 所以 $E(\eta) = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $D(\eta) = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$, 所以 $E(\xi) = 2E(\eta) = \frac{8}{3}$, $D(\xi) = 4D(\eta) = \frac{32}{9}$, 故填 $\frac{8}{3}$; $\frac{32}{9}$.

15: 已知 $\triangle ABC$ 的三个角 A, B, C 所对的边为 a, b, c . 若 $\angle BAC = 60^\circ$, D 为边 BC 上一点, 且 $AD=1$, $BD:DC = 2c:3b$, 则 $2b+3c$ 的最小值为_____.

解 1: 由题意 $\overrightarrow{AD} = \frac{3b}{3b+2c}\overrightarrow{AB} + \frac{2c}{3b+2c}\overrightarrow{AC}$,

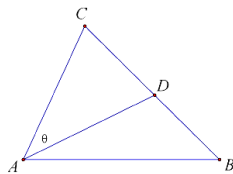
$$\text{两边平方得 } 1 = \frac{9b^2c^2}{(3b+2c)^2} + \frac{4c^2b^2}{(3b+2c)^2} + 2 \cdot \frac{3b \cdot 2c}{(3b+2c)^2} \cdot cb \cdot \frac{1}{2},$$

$$\text{化简得 } (3b+2c)^2 = 19b^2c^2 \Rightarrow 3b+2c = \sqrt{19}bc \Rightarrow \frac{3}{c} + \frac{2}{b} = \sqrt{19},$$

$$\text{所以 } 2b+3c = \frac{1}{\sqrt{19}}(2b+3c)\left(\frac{3}{c} + \frac{2}{b}\right) = \frac{1}{\sqrt{19}}\left(9 + 4 + \frac{6c}{b} + \frac{6b}{c}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{19}}\left(13 + 2\sqrt{\frac{6c}{b} \cdot \frac{6b}{c}}\right) = \frac{25\sqrt{19}}{19}, \text{ 故填 } \frac{25\sqrt{19}}{19}.$$

解 2: 设 $\angle CAD = \theta$, 则 $\angle BAD = 60^\circ - \theta$,

$$\frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle CAD}} = \frac{BD}{DC} = \frac{2c}{3b} = \frac{\frac{1}{2}c \cdot 1 \cdot \sin(60^\circ - \theta)}{\frac{1}{2}b \cdot 1 \cdot \sin \theta},$$



$$\text{化简得 } 2\sin \theta = 3\sin(60^\circ - \theta) \Rightarrow 7\sin \theta = 3\sqrt{3}\cos \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}},$$

$$\text{则 } \sin(60^\circ - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}, \text{ 所以 } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BAD} + S_{\triangle CAD} \Rightarrow \frac{1}{2}bc \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot 1 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}},$$

$$\text{化简得 } \frac{3}{c} + \frac{2}{b} = \sqrt{19},$$

$$\text{所以 } 2b + 3c = \frac{1}{\sqrt{19}}(2b + 3c) \left(\frac{3}{c} + \frac{2}{b} \right) = \frac{1}{\sqrt{19}} \left(9 + 4 + \frac{6c}{b} + \frac{6b}{c} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{19}} \left(13 + 2\sqrt{\frac{6c}{b} \cdot \frac{6b}{c}} \right) = \frac{25\sqrt{19}}{19}, \text{ 故填 } \frac{25\sqrt{19}}{19}.$$

16: 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足: $S_n + 2a_n = 6 - 6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则数列 $\{a_n\}$ 中最大项等于_____.

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, 由 } S_1 + 2a_1 = 6 - 6 \times \frac{2}{3} \Rightarrow 3a_1 = 2, \text{ 得 } a_1 = \frac{2}{3},$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } (S_n + 2a_n) - (S_{n-1} + 2a_{n-1}) = 6 - 6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 6 + 6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow 3a_n - 2a_{n-1} = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

$$\Rightarrow a_n - \frac{2}{3}a_{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow \frac{a_n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} - \frac{a_{n-1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}} = 1, \text{ 所以 } \left\{ \frac{a_n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} \right\} \text{ 是首项为 } 1 \text{ 公差为 } 1 \text{ 的等差数列; 即 } \frac{a_n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = n,$$

$$\text{所以 } a_n = n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n, \text{ 由 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow n > 2, \text{ 即当 } n \geq 3 \text{ 时, } a_n > a_{n+1} \text{ 恒成立;}$$

$$\text{又 } a_2 = a_3 = \frac{8}{9}, \text{ 即有 } a_1 < a_2 = a_3 > a_4 > a_5 > \cdots, \text{ 所以数列 } \{a_n\} \text{ 中最大项为 } \frac{8}{9}.$$

$$\text{故填: } \frac{8}{9}.$$

17: 已知 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 过点 G 的直线与边 AB , AC 分别相交于点 P , Q . 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, 则

当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle APQ$ 的面积之比为 $\frac{20}{9}$ 时, 实数 λ 的值为_____.

G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, 设 $\overrightarrow{AQ} = \mu\overrightarrow{AC}$, 故 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3\lambda}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3\mu}\overrightarrow{AQ}$, 因为 P ,

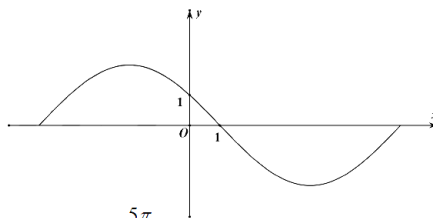
G, Q 三点共线, 故 $\frac{1}{3\lambda} + \frac{1}{3\mu} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 3$ ①. $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle APQ}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC}{\frac{1}{2} \cdot AP \cdot AQ \cdot \sin \angle BAC} = \frac{1}{\lambda\mu} = \frac{20}{9}$ ②. 由①②得:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{3}{5} \\ \mu = \frac{3}{4} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \lambda = \frac{3}{4} \\ \mu = \frac{3}{5} \end{cases}. \text{ 故填写: } \frac{3}{5} \text{ 或 } \frac{3}{4}.$$

18: (本小题满分 14 分) 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$) 的图象如图所示, 其中 $f(0) = 1, f(1) = 0$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期 T ;

(2) 若 $-2 < x_0 < 1$, 且 $f(x_0) = \frac{1}{2}$, 求 $\cos(\frac{\pi}{6}x_0)$.



(1) 解 $\because f(0) = 1$, 即 $2\sin\varphi = 1 \Rightarrow \sin\varphi = \frac{1}{2}$, 又 $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{5\pi}{6}$

又 $\because f(1) = 0$, 即 $2\sin(\omega + \frac{5\pi}{6}) = 0$, 又因为 $\omega > 0$, 由图可知 $\omega + \frac{5\pi}{6} = 2k\pi + \pi (k \in \mathbb{Z})$

当 $k \geq 1$ 时, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2k\pi + \frac{\pi}{6}} \leq \frac{12}{13}$, 与图像不符. 所以 $k = 0$, 即 $\omega = \frac{\pi}{6}$, 所以 $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$

(2) 解 由 (1) 可得 $f(x) = 2\sin(\frac{\pi}{6}x + \frac{5\pi}{6})$, $f(x_0) = 2\sin(\frac{\pi}{6}x_0 + \frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, 即 $\sin(\frac{\pi}{6}x_0 + \frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{4}$

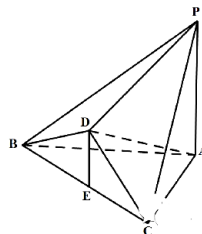
因为 $-2 < x_0 < 1$, 所以 $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6}x_0 + \frac{5\pi}{6} < \pi$, 所以 $\cos(\frac{\pi}{6}x_0 + \frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

$$\cos(\frac{\pi}{6}x_0) = \cos[(\frac{\pi}{6}x_0 + \frac{5\pi}{6}) - \frac{5\pi}{6}] = \cos(\frac{\pi}{6}x_0 + \frac{5\pi}{6})\cos\frac{5\pi}{6} + \sin(\frac{\pi}{6}x_0 + \frac{5\pi}{6})\sin\frac{5\pi}{6}$$

$$= (-\frac{\sqrt{15}}{4}) \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{5}+1}{8}$$

19: 如图, 在多面体 $ABCDP$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形, $PA = AC, BD = CD = 2\sqrt{2}$, $PB = PC = 4\sqrt{2}$, 点 E 为 BC 的中点, 平面 $BDC \perp$ 平面 ABC .

(1) 求证: $DE \parallel$ 平面 PAC ;



(2) 线段 BC 上是否存在一点 T ，使得二面角 $T-DA-B$ 为直二面角？

若存在着，试指出点 T 的位置；若不存在，请说明理由。

(1) $\because PA=AC=4, PB=PC=4\sqrt{2}, \therefore \angle PAC=90^\circ$ ，即 $PA \perp AC$ ，同理 $PA \perp AB$ ， $AB \cap AC=A$ ，
 $\therefore PA \perp$ 平面 ABC ， $\because BD=CD$ ， E 为 BC 的中点， $\therefore DE \perp BC$ ， $\because$ 平面 $BDC \perp$ 平面 ABC ，平面 $BDC \cap$ 平面 $ABC=BC$ ， $DE \subset$ 平面 BDC ， $\therefore DE \perp$ 平面 ABC ， $\therefore DE \parallel PA$ ， $\because PA \subset$ 平面 PAC ， $\therefore DE \parallel$ 平面 PAC 。

(2) 假设存在着点 T ，使得二面角 $T-DA-B$ 为直二面角，以 E 为原点，分别 EC, EB, ED 以所在直线为 x, y, z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示，则 $B(-2, 0, 0), A(0, 2\sqrt{3}, 0), D(0, 0, 2)$ ，

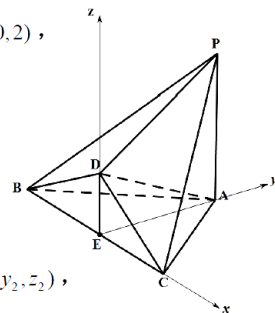
设 $T(t, 0, 0)$ ， $\therefore \overrightarrow{AD}=(0, -2\sqrt{3}, 2), \overrightarrow{AB}=(-2, -2\sqrt{3}, 0), \overrightarrow{DT}=(t, 0, -2)$ ，

设平面 ABD 的法向量为 $\vec{n}_1=(x_1, y_1, z_1)$ ，则 $\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AD}=0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AB}=0 \end{cases}$ ， $\begin{cases} -2\sqrt{3}y_1+2z_1=0 \\ -2x_1-2\sqrt{3}y_1=0 \end{cases}$ ，

$\therefore \begin{cases} z_1=\sqrt{3}y_1 \\ x_1=-\sqrt{3}y_1 \end{cases}$ ，令 $y_1=1$ ，则 $\vec{n}_1=(-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$ ，设平面 ADT 的法向量为 $\vec{n}_2=(x_2, y_2, z_2)$ ，

则 $\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{AD}=0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{DT}=0 \end{cases}$ ， $\begin{cases} -2\sqrt{3}y_2+2z_2=0 \\ tx_1-2z_1=0 \end{cases}$ ， $\therefore \begin{cases} y_2=\frac{\sqrt{3}}{3}z_2 \\ x_1=\frac{2}{t}z_1 \end{cases}$ ，令 $z_1=\sqrt{3}t$ ，则 $\vec{n}_2=(2\sqrt{3}, t, \sqrt{3}t)$ ， $\therefore \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2=-6+t+3t=0$ ，

$\therefore t=\frac{3}{2}$ 。



20: 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ ，且 $a_{n+1}=\frac{(2^{n+2}-3)a_n+2^{n+1}-1}{a_n+2^{n+1}-1}$ 。

(1) 令 $b_n=\frac{a_n+1}{2^n-1}$ ，证明： $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 为等差数列；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(3) 令 $c_n=\frac{na_n+2}{3^{n-1}}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

(1) 由题可知： $b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+1}{2^{n+1}-1}=\frac{2a_n+2}{a_n+2^{n+1}-1}$ ，则 $\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{a_n+2^{n+1}-1}{2a_n+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{b_n}$

即 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列

$$(2) \quad \text{由 (1) 可知: } \frac{1}{b_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n}{2} = \frac{2^n - 1}{a_n + 1}, \text{ 即 } a_n = \frac{2^{n+1} - 2}{n} - 1$$

$$(3) \quad c_n = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{n}{3^{n-1}}$$

$$\frac{n}{3^{n-1}} = n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(-\frac{9}{2}n - \frac{27}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(-\frac{9}{2}n - \frac{9}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{即 } S_n = \frac{4 \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1 - \frac{2}{3}} - \left[\left(-\frac{9}{2}n - \frac{27}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \cdots + \frac{9}{4}\right] = \frac{39}{4} - 12 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{9}{2}n + \frac{27}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

21: (本小题满分 15 分) 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点到直线 $x - 3y = 0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$,

离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 抛物线 $G: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点与椭圆 E 的焦点重合, 斜率为 k 的直线 l 过 G 的焦点

与 E 交于 A, B , 与 G 交于 C, D .

(I) 求椭圆 E 及抛物线 G 的方程;

(II) 是否存在常数 λ , 使得 $\frac{1}{|AB|} + \frac{\sqrt{5}\lambda}{|CD|}$ 为常数? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.

解 (1) 设 G 的焦点为 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 由题意 $\frac{\frac{p}{2}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 得 $p = 4$.

所以抛物线 G 的方程为 $y^2 = 8x$.

且有 $F(2, 0)$. 又椭圆 E 得离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\frac{2}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 得 $a = \sqrt{5}$. 继而得 $b = 1$.

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$.

(2) **解 1:** (利用倾斜角的焦点弦公式)

设直线 l 的倾斜角为 α , 则 $|AB| = \frac{2\sqrt{5}}{5 - 4\cos^2 \alpha}$, $|CD| = \frac{8}{\sin^2 \alpha}$.

$$\text{因此 } \frac{1}{|AB|} + \frac{\sqrt{5}\lambda}{|CD|} = \frac{5-4\cos^2\alpha}{2\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}\lambda\sin^2\alpha}{8} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{\sqrt{5}\lambda}{8}\sin^2\alpha - \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos^2\alpha \right)$$

$$\text{当 } \frac{\sqrt{5}\lambda}{8} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 即 } \lambda = -\frac{16}{5} \text{ 时 } \frac{1}{|AB|} + \frac{\sqrt{5}\lambda}{|CD|} \text{ 为定值 } \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

解 2: (设联消韦判)

设直线 l 的方程为 $x = my + 2$, 并设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$.

联立 $x = my + 2$ 与 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$, 消去 x , 整理得 $(m^2 + 5)y^2 + 4my - 1 = 0$.

$$\text{所以 } |y_1 - y_2| = \frac{2\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}}{m^2+5}, \text{ 得 } |AB| = \sqrt{m^2+1}|y_1 - y_2| = \frac{2\sqrt{5}(m^2+1)}{m^2+5}.$$

联立 $x = my + 2$ 与 $y^2 = 8x$, 消去 x , 整理得 $y^2 - 8my - 16 = 0$.

所以 $y_3 + y_4 = 8m$, 得 $|CD| = x_3 + x_4 + 4 = m(y_3 + y_4) + 8 = 8(m^2 + 1)$.

$$\text{得 } \frac{1}{|AB|} + \frac{\sqrt{5}\lambda}{|CD|} = \frac{\sqrt{5}(m^2+5)}{10(m^2+1)} + \frac{\sqrt{5}\lambda}{8(m^2+1)} = \frac{\sqrt{5}(4m^2+20+5\lambda)}{40(m^2+1)}$$

$$\text{当 } 20 + 5\lambda = 4, \text{ 即 } \lambda = -\frac{16}{5} \text{ 时, } \frac{1}{|AB|} + \frac{\sqrt{5}\lambda}{|CD|} \text{ 为定值 } \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

22: 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 + (a-1)x$ ($a \in \mathbf{R}, a \neq 0$).

(I) 当 $a < -1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(II) 记函数 $F(x)$ 的图象为曲线 C , 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是曲线 C 上两个不同点, 如果曲线 C 上存在 $M(x_0, y_0)$, 使得: ① $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$; ② 曲线 C 在点 M 处的切线平行于直线 AB , 则称函数 $F(x)$ 存在“中值相依切线”. 试问: 函数 $f(x)$ 是否存在中值相依切线, 请说明理由.

(III) 当 $a = 1, x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, 关于 x 的不等式 $2f(x) + x^2 + mx^3 e^{mx} \leq 0$ 恒成立, 求实数 m 的最大值.

(I) 解 : 注意到导函数可因式分解

$$f'(x) = \frac{1}{x} - ax + a - 1 = \frac{-ax^2 + (a-1)x + 1}{x} = \frac{(ax+1)(-x+1)}{x}.$$

令 $f'(x)=0$ 可得 $x=1$ 或 $x=-\frac{1}{a}$, 这里 $-\frac{1}{a}<1$.

则 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0, -\frac{1}{a}\right)$ 和 $(1, +\infty)$.

(II) 解 : 变量转化, 化归为对数均值不等式

注: 题目表述不合适, 应该是存在点 A 和点 B .

假设存在 “中值相依切线”

$$f'(x_0) = \frac{1}{x_0} - ax_0 + a - 1, \quad ,$$

$$k_{AB} = \frac{\ln x_2 - \ln x_1 - \frac{1}{2}a(x_2^2 - x_1^2) + (a-1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} - \frac{1}{2}a(x_1 + x_2) + a - 1 = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} - ax_0 + a - 1$$

由题设条件, 有 $f'(x_0) = k_{AB}$, 即 $\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_0} = \frac{2}{x_1 + x_2}$, 这与对数均值不等式矛盾!

所以不存在 “中值相依切线”.

(III) 解 : 转化为同构式

当 $a=1$ 时, $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$. 即 $2\ln x + mx^3e^{mx} \leq 0$ 恒成立. $m \leq 0$ 时显然恒成立, 只需考虑 $m > 0$.

即 $\frac{\ln x^2}{x^2} + mx e^{mx} \leq 0$ 恒成立.

$$\text{即 } mx e^{mx} \leq -\frac{\ln x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} \ln \frac{1}{x^2}.$$

令 $F(x) = x \ln x$, 则 $F(e^{mx}) \leq F\left(\frac{1}{x^2}\right)$, 并且 $e^{mx} > 1$, $\frac{1}{x^2} > 1$.

而 $F(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $e^{mx} \leq \frac{1}{x^2}$, 则 $m \leq \frac{-2 \ln x}{x}$ 恒成立.

令 $g(x) = -\frac{2 \ln x}{x}$, 则 $g'(x) = -2 \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$, $g(x)$ 单调递减

则 $g(x) > g\left(\frac{1}{e}\right) = 2e$, 则 $m < 2e$.

综上所述, m 的取值范围是 $(-\infty, 2e)$.